

1a. Kirchhoff: $\frac{Q}{C} - L \frac{dI}{dt} - IR = 0$

b. Op $t = 0$ geldt $I(0) = 0$, zodat: $\left. \frac{dI}{dt} \right|_0 = \frac{Q}{C} \frac{1}{L} = \frac{V_0}{L}$

c. $I = -\frac{dQ}{dt}$

d. $\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2} LI^2 \right] = \frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} + LI \frac{dI}{dt} = -\frac{Q}{C} I + I \left(\frac{Q}{C} - IR \right) = -I^2 R$

2a. $\sigma = \epsilon_0 E$; E staat loodrecht op de plaat

b. $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{y^2 + (a-x)^2}} - \frac{1}{\sqrt{y^2 + (a+x)^2}} \right]$

c. 1e methode: $E = -2 \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 (a^2 + y^2)} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}} = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{a}{(a^2 + y^2)^{3/2}}$

2e methode: $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$

de loodrechte component is: $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(a-x)}{(y^2 + (a-x)^2)^{3/2}} + \frac{(a+x)}{(y^2 + (a+x)^2)^{3/2}} \right]$

Op de plaat ($x = 0$) volgt nu: $E_x(0, y) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{a}{(a^2 + y^2)^{3/2}}$

d. De ladingsdichtheid op een ring met straal r in het yz -vlak wordt gegeven door:

$\sigma(r) = -\frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{a}{(a^2 + r^2)^{3/2}}$ De totale lading op de plaat is dan:

$q = \int \sigma 2\pi r dr = -\frac{Qa}{2\pi} \int \frac{2\pi r dr}{(a^2 + r^2)^{3/2}} = Qa \left[\frac{1}{(a^2 + r^2)^{1/2}} \right]_0^\infty = -Q$

3a. $B_r = \frac{\mu_0 m}{2\pi r^3} \cos\theta$ en $B_\theta = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \sin\theta$

b. $B_x = B_r \cos\theta - B_\theta \sin\theta = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (3 \cos^2\theta - 1)$

c. $d\Phi = B_x 2\pi y dy = \frac{\mu_0 m}{2r^3} (3 \cos^2\theta - 1) y dy$

met $\frac{x}{r} = \cos\theta$ en $\frac{y}{x} = \tan\theta$ zodat $dy = \frac{x}{\cos^2\theta} d\theta$

volgt: $d\Phi = \frac{\mu_0 m}{2x} (3 \cos^2\theta - 1) \sin\theta d\theta$

d. $\Phi = \int_0^{\theta_0} d\Phi = \frac{\mu_0 m}{2x} \int_0^{\theta_0} (3 \cos^2\theta - 1) \sin\theta d\theta = \frac{\mu_0 m}{2x} [\cos\theta - \cos^3\theta]_0^{\theta_0}$

met $\cos\theta_0 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}$ volgt: $\Phi = \frac{\mu_0 m R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}}$

e. $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{3\mu_0 m R^2 x}{2(x^2 + R^2)^{5/2}} \cdot v_0$

$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dx} \frac{dx}{dt} \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{3\mu_0 m R^2 x}{2(x^2 + R^2)^{5/2}} v_0$

elc = 12 punten

BIJ DIT TENTAMEN MAG JE HET BOEK GEFUUKEN

Opgave 1: Geveel

Een uniform aartalen bol met straal R is gevuld. In de aartalen bol bevindt zich een lading Q die uniform over de ruimte binnen de bol is verdeeld.



- Bereken de elektrische veldsterkte $E(r)$ binnen de bol als functie van de afstand r tot het centrum.
- Bereken de potentiaal $V(r)$ voor $0 \leq r \leq R$ en voor $r > R$.
- Bereken de totale elektrische energie van de bol met daarin de lading Q.

Opgave 2: Inductie

Een goed geleidende sferische geleider bol met straal R bevindt zich op een vlakke geleidende grondvlak. De z-as is de richting van de positieve z-as gericht is. Als gevolg daarvan wordt op de bol lading verschoven. De ene kant wordt positief en de ander kant negatief. De ladingsverdeling is niet uniform, maar hangt vanwege de symmetrie, alleen af van de hoek θ met de z-as (zie figuur).



De secundaire ladingsdichtheid is dus: $\sigma = \sigma(\theta)$

Het totale elektrische veld wordt bepaald door het uitwendige veld en het veld ten gevolge van de ladingverdeling op de bol. Vanwege de symmetrie hangt de veldsterkte alleen af van de afstand tot het centrum van de bol en de hoek met de oorsprong van het coördinatenstelsel tot de hoek θ met de z-as.

De veldsterkte op de punt op de bol blijkt nu te geven: $V(r, \theta) = (Ar + \frac{B}{r}) \cos\theta$

- Bereken de veldsterkte en richting op punten A en B door uit te gaan van de veldsterkte op de bol.
- Bereken de veldsterkte op de z-as voor $r > R$ dat zeer ver van de bol verwijderd is. Geef het veld ten gevolge van de lading op de bol afzonderlijk op het veld.
- Bereken de veldsterkte voor een punt op de z-as voor $r < R$ en bereken daarmee de constanten A en B. Het veld op de z-as moet natuurlijk een zinnig verband hebben met de lading Q.

De veldsterkte op de z-as is de elektrische veldsterkte $E(r)$ op de z-as bij een elektrische geleider en de ladingdichtheid ρ op de bol op welke wijze is afhankelijk van R en Q .